# ラグランジュの未定乗数法

清家大嗣

平成 30 年 9 月 20 日

## 1　ラグランジュの未定乗数法

ラグランジュの未定乗数法は、入力変数に拘束条件が加えられた関数の極大・極小点を探す際に、その目安となる停留点[1] がどのような条件を満たすべきかという問いに対する解を与える。以下、関数 $f$ は $n$ 次元のベクトル $\boldsymbol{x}$ を引数に持つとする。また、ベクトル $\boldsymbol{x}$ は、以下の $m$ 個の拘束条件式 $g_i(\boldsymbol{x}) = 0$ $(i = 1, 2, ...m)$ を満たすのように変化するとする。ここで、これらの $m + 1$ 個の関数と未知数 $\lambda_i$ を用いて新たに関数 $L$ を定義する。

$$L(\boldsymbol{x}) \equiv f(\boldsymbol{x}) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

ラグランジュの未定乗数法では、次式を満たす点 $\boldsymbol{x}$ と各係数 $\lambda_i$ が見つかれば、拘束条件を満たした (引数ベクトル $\boldsymbol{x}$ の自由度が制約されている) 上での停留点が得られるとしている。

$$\nabla L(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

$$\partial L(\boldsymbol{x})/\partial \lambda_i = 0 \ (i = 1, ..., m) \tag{3}$$

3 式は単純に拘束条件を満たされていることを示している。 また、2 式は 5 式を見ればわかるが、停留点において関数 $f$ の勾配ベクトルが、各拘束条件の関数 $g_i$ の一次結合 (線形結合) で表せるということを意味する。2, 3 式が、停留点であることの必要十分条件であることを示す。

### 1.1　2, 3 式を満たすことが停留点の十分条件であること

3 式より、拘束条件として与えらえる全ての関数 $g_i$ は $n$ 個の変数が拘束条件に基づき変動可能な範囲で 0 (定数) となる。つまり、$\boldsymbol{x}$ が拘束条件を満たしながら $\boldsymbol{x} + \Delta\boldsymbol{x}$ に移動する場合、常に次式が成立する必要がある。

$$\Delta g_i = \nabla g_i(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x} = 0 \tag{4}$$

また、2 式を変形すると次式が得られる。

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

[1] $n$ 変数で拘束条件がないなら各変数に対して微分した値が 0 となること。鞍点もこれに含まれる。鞍点はある変数に関しては、最大値。他の変数に関しては最小値などで微分した値が 0 になるケースである。また、拘束条件がある場合、その拘束条件を満たした状態で変化可能な全ての微小量 $\Delta\boldsymbol{x}$ に対して、$\nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \Delta\boldsymbol{x} = 0$ を満たす点が停留点となる

つまり、4 式の拘束条件から拘束条件を満たすように $\boldsymbol{x}$ を微小変化させた場合を考えると、確かに拘束条件に従った上での変数 $\boldsymbol{x}$ の微小変動に対して、関数 $f$ の変動が 0 (停留点 [2] の条件) となっていることがわかる。

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) \cdot \Delta \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\boldsymbol{x}) \cdot \Delta \boldsymbol{x} = 0 \tag{6}$$

つまり、2, 3 式が満たされれば停留点となることが理解される。

### 1.2　2, 3 式を満たすことが停留点である必要条件であること

停留点であるということは、拘束条件を満たしながら変化した場合の微小変位ベクトル $\Delta \boldsymbol{x}$ に対して、$\nabla f$ が直交している必要がある。また、この変位ベクトル $\Delta \boldsymbol{x}$ が満たす条件は 4 式のように、任意の拘束条件に対して $\nabla g_i$ と $\Delta \boldsymbol{x}$ が直交することである。つまり、$\nabla g_i$ の線形結合により張られる $n$ 次元空間を $V_{\mathrm{break}}$ とすれば、$\Delta \boldsymbol{x}$ は、その直交補空間 $V_{\mathrm{meet}}$ に含まれる [3]。当然、その直交補空間の任意のベクトルに対して、$\nabla f$ は直交している必要がある。このことは、$\nabla f$ が $\nabla g_i$ $(i = 1, ..., m)$ の線形結合で表されること ($V_{break}$ 内の空間に存在する) に他ならない。

## 参考文献


[1] 「ラグランジュの未定係数法 」http://dora.bk.tsukuba.ac.jp/~takeuchi/?%E9%87%8F%E5%AD%90%E5%8A%9B%E5%AD%A6%E2%85%A0%2F%E3%83%A9%E3%82%B0%E3%83%A9%E3%83%B3%E3%82%B8%E3%83%A5%E3%81%AE%E6%9C%AA%E5%AE%9A%E4%BF%82%E6%95%B0%E6%B3%95

[2] 「勾配法は本当に鞍点近傍にはまるのか？モース理論で考えてみる」https://qiita.com/NaokiHamada/items/889c2e628505dc41e7a9


[2]鞍点は極値を取らない停留点である。例えば変数 $x_1$ に対しては最大値、変数 $x_2$ に対しては最小値となるようなケースがそれにあたる

[3]数式で表すと点 $\boldsymbol{x}$ における拘束条件 $g_i(\boldsymbol{x})$ $(i = 1, 2, ..., m)$ に関する直交補空間 $V_{\mathrm{meet}}$ は $\forall_{i \in \{1,2,...,m\}} \forall_{\Delta \boldsymbol{x} \in V_{\mathrm{meet}} \nabla g_i(\boldsymbol{x})} \Delta \boldsymbol{x} = 0$ と表現できる