# 実対称行列の性質について

清家大嗣

平成 30 年 9 月 21 日

## 1 実対称行列の性質について

この文章では、実対称行列の性質とその証明について列挙していく。

**Th. 1.** 実対称行列の固有値は実数となる。つまり、固有ベクトルも実ベクトルとなる。

*Proof.* $A$ を対称行列とし、$\boldsymbol{x}, \lambda$ を固有ベクトル、対応する固有値とすれば簡単にわかる。$\boldsymbol{x}^* A\boldsymbol{x} = \lambda|\boldsymbol{x}|^2$ となり、また、$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ の複素共役転置を考えれば、$\boldsymbol{x}^* A = \bar{\lambda}\boldsymbol{x}^*$ となるので、$\boldsymbol{x}^* A\boldsymbol{x} = \bar{\lambda}|\boldsymbol{x}|^2$ となる。したがって、2 式を比較することで $\lambda$ は実数値となる。 □

**Th. 2.** 実対称行列の固有値の異なる任意の *2* つの固有ベクトルは常に直交する。

*Proof.* 異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2$ とそれらに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を考えて $\boldsymbol{y}^* A\boldsymbol{x} = \lambda_1 \boldsymbol{y}^* \boldsymbol{x}$。また、 $\boldsymbol{y}^* A\boldsymbol{x} = \bar{\lambda_2}\boldsymbol{y}^*\boldsymbol{x}$ となる。$\lambda_1 \neq \lambda_2$ と、全固有値、固有ベクトルが実数をとることより、2 式を比較すれば $\boldsymbol{y}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる。 □

**Th. 3.** 実対称行列 $A$ から、適当に $n$ 個の互いに直交する固有ベクトルを選び、正規直交基底が得ることができる。

*Proof.* $|A - I\lambda|\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を利用して固有ベクトルを求める際に、代数学の基本定理から、複素解と重解を含めて、

$$|A - \lambda I| = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdot ... \cdot (\lambda - \lambda_p)^{n_p} = 0 \tag{1}$$

と表せる。$n_i$ は対応する固有値 $\lambda_i$ の重複度であり、$\sum_i n_i = n$ となることに注意する。「対角化可能な行列の各固有値の固有空間の次元は、その重複度に等しい」 という性質から、固有値 $\lambda_i$ に対応する任意の固有ベクトル空間の固有ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ は、一次独立な $n_i$ 個のベクトルを用いて $\boldsymbol{x}_i = \sum_{k=1}^{n_i} c_{k,i}\boldsymbol{t}_{k,i}$ と表せる。つまり、1 次独立な $n_i$ 個の固有ベクトルを選び、グラムシュミットの直交化を適応させれば、新たな互いに直交する大きさ 1 の $\boldsymbol{v}_{k,i}$ $(k = 1, ..., n_i)$ が得られる。これをすべての固有値に対して実行すれば、得られる $n$ 個のベクトルは直交する $\boldsymbol{v}_{k,i}$ $(k = 1, ..., n_i, i = 1, ..., p)$ (実対称行列の固有値の異なる固有ベクトルは互いに直交するため)。従って、これらは、すべて大きさ 1 で直交するという条件を満たす $n$ 個のベクトルになるため、正規直交基底となる □

**Th. 4.** 対角化可能な行列の各固有値の固有空間の次元は、その重複度に等しい

*Proof.* 行列 $A$ のある固有値 $\lambda_i$ に対して次式を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ が固有ベクトルである。

$$(\lambda_i I - A)\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \tag{2}$$

従って、上式の解全体により構成されるベクトル空間が固有空間 $E_{\lambda_i}$ となる。$E_{\lambda_i}$ の次元は

$$\dim(E_{\lambda_i}) = \mathrm{rank}(\lambda_i I - A) \tag{3}$$

となる。正則行列をかけても行列の rank が変わらないことから, 行列 A が対角化できることと合わせて

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(\lambda_i - A) &= \mathrm{rank}(P^{-1}\lambda_i P - P^{-1}AP) \\ &= \mathrm{rank}(\lambda_i I - \Lambda)\end{aligned} \tag{4}$$

対角化された行列 $\Lambda$ の対角成分は重複度の数だけ、それに対応した固有値が出現することになる。

□

**Th. 5.** 固有値 $\lambda_k$ の固有空間の次元 $\dim E(\lambda_k)$ と固有値 $\lambda_k$ の重複度 $d_k$ との関係は，$\dim E(\lambda_k) \leq d_k$ で表される。

*Proof.* 対角化可能なため $P^{-1}AP = \Lambda$ となるような対角行列が存在する。ここで、固有値 $\lambda_k$ の固有空間の正規直交基底を $\boldsymbol{p}_1, ..., \boldsymbol{p}_s$ と置きなおすと

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_k I_s & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \tag{5}$$

とすることができる。従って、積の行列式は行列式の積であること、直交行列の行列式は 1 か -1 であることを利用して

$$|\lambda I - A| = |\lambda I - P \begin{pmatrix} \lambda_k I_s & B \\ 0 & C \end{pmatrix} P^{-1}| = |\lambda I - \begin{pmatrix} \lambda_k I_s & B \\ 0 & C \end{pmatrix}| = (\lambda - \lambda_k)^s |\lambda I_{n-s} - C| \tag{6}$$

が得られるため、少なくとも $s$ は $\lambda_k$ の重複度以下の個数となる。 □

# 参考文献


[1] 高校数学の美しい物語「対称行列の固有値と固有ベクトルの性質の証明」`https://mathtrain.jp/symmetriceigen`

[2] 「実対称行列 A は対角化可能である」`https://www.cck.dendai.ac.jp/math/support/ch6-supp/対称行列の直交行列による対角化.pdf`