幾何分布を指数分布に近似させる

清家大嗣

2024 年 4 月 16 日

1　前提

以下のような密度関数 $f(x)$ を持つ確率分布を指数分布と呼ぶ.

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \tag{1}$$

ここで, λ は到来率 (Arrival rate) と呼ばれ, 小さければ小さいほど, 指数分布の裾野は長くなる. 指数分布は, 幾何分布の極限として与えられる. 時刻 $[0, \infty)$ を $1/n$ の長さに分割し, 時刻 $t = k/n (k = 0, 1, 2, ...)$ を考える. 十分に大きい n について, ある確率事象 A が区間 $[i/n, (i+1)/n)$ で生起する回数は高々 1 回に抑えられる, と考える. この確率 $p = \lambda/n$ とすれば, 単位時間当たりに生起する事象 A の回数は $np = \lambda$ となる.

ここで, 事象 A が確率 $1 - \lambda/n$ で起こらないケースを考えることで, 幾何分布の確率質量関数が得られる. 初めて, 事象 A が生起した時刻を $t = k/n$ として,

$$p_k = (1 - \frac{\lambda}{n})^k \frac{\lambda}{n} \tag{2}$$

$k = nt$ を代入し, (3) 式を利用し, かつ $1/n \sim dt$ とできるほど, 大きい n を考えれば (4) 式が得られる.

$$(1 - \frac{\lambda}{n})^{nt} = \left((1 - \frac{\lambda}{n})^{-n/\lambda} \right)^{-\lambda t} = \exp(-\lambda t) \tag{3}$$

$$p_k = f(t)dt = \exp(-\lambda t)\lambda \frac{1}{n} = \exp(-\lambda t)\lambda dt. \tag{4}$$

これは, 指数分布の確率密度関数に他ならない.

参考文献

[1] 会田茂樹のホームページ, 講義資料より `https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~aida/lecture/28/lecture2016.pdf`