# ドリフト付きブラウン運動における初到達時間の分布

Hirotsugu Seike

2026 年 1 月 12 日

## 1　導入

ドリフト付きブラウン運動 (Brownian motion) とは, 標準ブラウン運動 $B_t$ が与えられた時に, $X_t = \mu t + \sigma B_t$ $(\mu, \sigma > 0)$ で定義される確率過程である．本稿では, 過程が水準 $a$ を初めて上回る初到達時間 $r_a$ の分布が逆ガウス分布に従うことを示す ($\mu = 0$ でレヴィ分布となる). $Y_t \equiv \mu/\sigma t + B_t = \theta t + B_t$ として, $r_a \equiv \inf\{t : Y_t \geq a/\sigma = b\}$ の分布を求めればよい.

## 2　導出

### 2.1　確率測度の変換

反射原理 (reflection principle) を適用するため, $Y_t$ を標準ブラウン運動として扱える確率測度 $Q$ を次式で定義する.

$$\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t \quad (Z_t = \exp(-\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)). \tag{1}$$

$P$ は基準測度 (reference measure) であり, これをギルザノフ変換 (Gilsanov Transformation) と呼ぶ [1]. $\mathcal{F}_t$ は, 時刻 $t$ までに分かっている情報全体からなるフィルトレーション (filtration) である．上記の非負確率過程 $Z_t$ が, $\mathbb{E}_P[Z_t] = 1$ を満たしていることに注意する (確率測度変換の必要条件).

ここで, 確率測度 $Q$ の下で, $Y_t$ が標準ブラウン運動になることを示す．初期値は $Y_0 = \theta{\cdot}0{+}B_0 = 0$ となる．二次変分は $< Y >_t = < B + \theta t >_t = < B >_t = t$ となる．また, $Y_t$ が $Q$-マルチンゲールであることを示せばよい．つまり, 任意の $0 \leq s < t$ について, $\mathbb{E}_Q[Y_t|\mathcal{F}_t] = Y_s$ が成立する.

任意の $\mathcal{F}_t$-可積分な $X$ について,

$$\mathbb{E}_Q[X|\mathcal{F}_s] = \frac{\mathbb{E}_P[Z_t X|\mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}_P[Z_t|\mathcal{F}_s]}. \tag{2}$$

ここで, $X = Y_t = \theta t + B_t$ とする．2 式右辺の分母は, 以下の式変形より, $Z_s$ となる.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P[Z_t|\mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_P[\exp(-\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)|\mathcal{F}_s], &(3)\\
&= \mathbb{E}_P[\exp(-\theta B_s - \frac{1}{2}\theta^2 s) \cdot \exp(-\theta(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\theta^2(t-s))|\mathcal{F}_s], &(4)\\
&= Z_s \cdot \mathbb{E}_P[\exp(-\theta(B_{t-s}) - \frac{1}{2}\theta^2(t-s))|\mathcal{F}_s] = Z_s. &(5)
\end{aligned}$$

ここで, 異なる区間での標準ブラウン運動の独立性を利用したことに注意する. また, 2 式右辺の分子は, 以下の式変形より $Z_sB_s$ となる ($\Delta B = B_t - B_s, \Delta t = t - s$ とした) .

$$\mathbb{E}_P[Z_tY_t|\mathcal{F}_s] = Z_s\mathbb{E}_P[\exp(-\theta\Delta_B - \frac{1}{2}\theta^2\Delta t)\cdot(B_s + \Delta B + \theta t)|\mathcal{F}_s], \tag{6}$$

$$= Z_s\left((B_s + \theta t) - \theta(t-s)\right), \tag{7}$$

$$= Z_s(B_s + \theta s) = Z_sY_s. \tag{8}$$

6 から 7 式への変形は, $\mathbb{E}_P[\exp(-\theta B_t)] = \exp(1/2\cdot\theta^2 t)$ の両辺を $\theta$ で微分することで得られる $\mathbb{E}_P[-B_t\exp(-\theta B_t)] = \theta t\exp(1/2\cdot\theta^2 t)$ より導ける.

## 2.2 反射原理と確率密度関数の導出

過程 $Y_t$ の上限が $b$ 以上である確率から, 初到達時間 $r_a$ の累積分布関数が得られる.

$$P(r_a \le t) = P(\sup_{s\le t} Y_s \ge b). \tag{9}$$

前節の測度変換の議論より, $dP/dQ|_{\mathcal{F}_t} = 1/Z_t$ となる. 指標関数 $\mathbf{1}_{(\cdot)}$ を用いて 9 式は次のように書くことができる.

$$P(r_a \le t) = \mathbb{E}_Q[\exp(\theta B_t + \frac{1}{2}\theta^2 t)\cdot\mathbf{1}_{\{\sup_{s\le t} Y_s \ge b\}}], \tag{10}$$

$$= \mathbb{E}_Q[\exp(\theta Y_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)\cdot\mathbf{1}_{\{\sup_{s\le t} Y_s \ge b\}}]. \tag{11}$$

また, 事象を分解すると $\{\sup_{s\le t} Y_s \ge b\} = \{B_t \ge b\} \cup \{\sup_{s\le t} Y_s \ge b, Y_s \le b\}$ となる. ここで, 反射写像 $R_b$ を次式で考える.

$$(R_bY)_s = \begin{cases} Y_s, & s \le r_a, \\ 2b - Y_s, & s > r_a. \end{cases} \tag{12}$$

事象の第二項の確率計算は, $B_t > b$ として, その反射である $B_t - 2(B_t - b) = 2b - B_t$ は同確率で存在することを利用する. 事象の第一項の確率を $I_1$, 第二項を $I_2$ として, 各々次式のように計算される.

$$I_1 = \int_b^\infty \exp\left(\theta x - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)dx, \tag{13}$$

$$= \int_b^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(x-\theta t)^2}{2t}\right)dx = \Phi(\frac{\theta t - b}{\sqrt{t}}). \tag{14}$$

同様にして,

$$I_2 = \exp(2b\theta)\int_b^\infty \exp\left(-\theta x - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)dx, \tag{15}$$

$$= \exp(2b\theta)\,\Phi(-\frac{\theta t + b}{\sqrt{t}}). \tag{16}$$

ここで, $\Phi(\cdot)$ は, 標準正規分布の累積分布関数であり, $\theta \to \infty$ で $I_1 = 1, I_2 = 0$ になることに注意する (ドリフトの影響が大きくなれば, 時刻 $t$ で水準 $a$ を越す確率が 1 に収束).

$P(r_a \le t) = I_1 + I_2$ の両辺を $t$ で微分して, $b = a/\sigma$, $\theta = \mu/\sigma$ を代入し整理して, 次の確率密度関数が得られ, 逆ガウス分布に従うことが分かる ($\mu = 0$ でレヴィ分布).

$$f_{r_a}(t) = \frac{b}{\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left(-\frac{(b-\theta t)^2}{2t}\right), \qquad t > 0, \tag{17}$$

$$= \frac{a}{\sigma\sqrt{2\pi t^3}}\exp\left(-\frac{(a-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\right), \qquad t > 0, \tag{18}$$

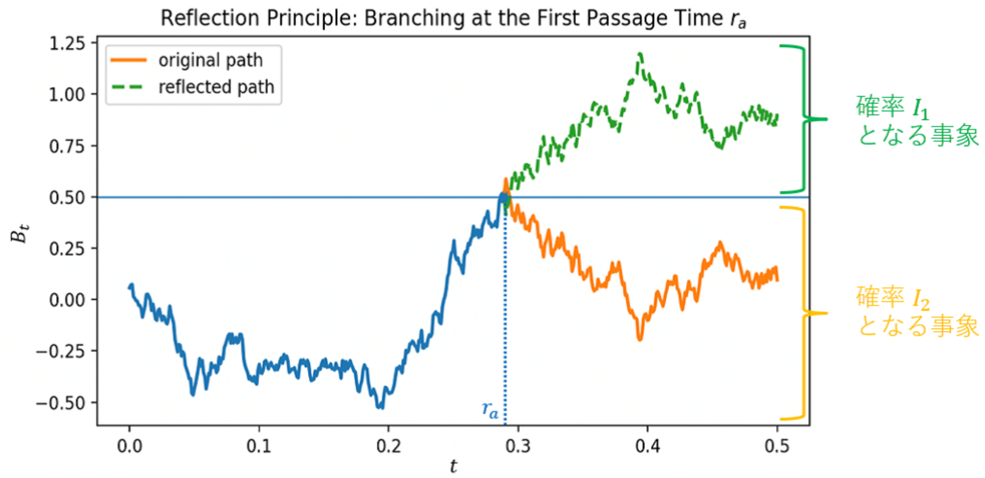


図 1: 反射原理の概念図

## 参考文献


[1] A.-S. Sznitman, Brownian Motion and Stochastic Calculus, Lecture Notes, Dept. of Mathematics, ETH Zürich, 2013.


## 付録 A　特になし