熱伝導方程式の解の導出

Hirotsugu Seike

2026 年 1 月 26 日

1 導入

熱伝導方程式は, 形式解を導くことができる珍しい一例である (2 階線形偏微分方程式の場合, 波動方程式, ラプラス方程式なども形式解が得られる). 金融・証券分野で搭乗するブラック・ショールズ偏微分方程式においても, 同様な式変形を行って形式解を導出する [1]. また, 熱伝導方程式は, 拡散方程式とも呼ばれ, 「何かが空間やネットワーク上でなだらかに広がる」現象を, 汎用的に表現可能である.

2 熱伝導方程式の導出と, その形式解

例えば, 一次元の棒の温度分布 $y(u,x)$ を考える (場所を u, 時刻を x とする). 導体の比熱が一定と仮定して, 区間 $[\alpha,\beta]$ の総熱量は $Q(x) = \int_\alpha^\beta y(u,x)du$ となる. フーリエの法則より, 各点での熱流は温度勾配 $\partial y(u,x)/\partial u$ に比例するため, 比例定数 $a > 0$ として, $u = \beta$ の熱流出は $a \cdot \partial y(u,x)/\partial u|_{u=\beta}$ で与えられる. 従って, 熱の出入りは, 総熱量 $Q(x)$ の時間変化に等しいため,

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial x} = a \cdot \left(a \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u,x)\bigg|_{u=\beta} - a \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u,x)\bigg|_{u=\alpha} \right) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial}{\partial u}\left(a \frac{\partial y}{\partial u}(u,x) \right) du. \tag{1}$$

総熱量の $Q(x)$ の定義を考えると, 次式が得られる.

$$\frac{\partial y}{\partial x}(u,x) = a \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}(u,x). \tag{2}$$

以下, 簡単のため $y_x(u,x) = ay_{uu}(x,u)$ で上式を表す. 境界条件として, 初期の温度分布が $g(u)$ で与えられ場, 棒の両端 $[0,1]$ で熱の出入りが存在しないことを仮定する.

$$\begin{cases} y_u(0,x) = 0, y_u(1,x) = 0, \\ y(u,0) = g(u). \end{cases} \tag{3}$$

また, $y(u,x)$ が u と x の関数として, $y(u,x) = V(u)W(x)$ と表せると仮定すれば, 2 式より, 4 式が得られる (λ は実数とする).

$$\frac{V_{uu}(u)}{V(u)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{W_x(x)}{W(x)} = \lambda. \tag{4}$$

u に関する定数係数 2 階線形微分方程式を解いて, 3 式の境界条件を考慮すれば, 下式が得られる (特性方程式は $s^2 - \lambda = 0$).

$$V(u) = \begin{cases} 0, & (\lambda > 0), \\ C, & (\lambda = 0), \\ C' \cos(n\pi u), & (\lambda < 0, \sqrt{-\lambda} = n\pi, n = 1,2,...). \end{cases} \tag{5}$$

ここで, C, C' は積分定数である．4 式は, x に関する定常係数 1 階線形微分方程式であるため, $\sqrt{-\lambda} = n\pi$ $(n = 1, 2, ...)$ であることを思い出せば,

$$W(x) = D \cdot \exp(-an^2\pi^2 x). \tag{6}$$

ただし, D は積分定数である．従って, 5, 6 式を重ね合わせて (4 式の λ の値は共有していることに注意する),

$$y(u, x) = V(u) \cdot W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C(n) \cdot \cos(n\pi u) \cdot \exp(-an^2\pi^2 x). \tag{7}$$

ここで, 境界条件 $y(u, 0) = g(u)$ と, 周期 2 の周期関数であることを考慮し, フーリエ級数展開の係数と比較すれば, 係数 $C(n)$ が求まる ($y(u, 0)$ が偶関数であることを利用した．また, $y(u, x) = 0$ $(u \notin [0, 1])$ であることに注意する).

$$C(n) = 2\int_0^1 g(u)\cos(n\pi u)du \tag{8}$$

参考文献

[1] 石村貞夫, 石村園子, 『増補版 金融・証券のためのブラック・ショールズ微分方程式』, 東京: 東京図書, 2008 年.

付録 A　特になし