スケール不変性・無記憶性とLomax分布 - 指数的減衰とべき乗的減衰

Hirotsugu Seike

2026 年 1 月 18 日

1　導入

1954 年, ビジネスの失敗率 (business failure rate) は時間の経過とともに単調に減少するという経験的事実を記述する目的で, Lomax 分布 [1] は導入された. Lomax 分布は, 指数分布の率パラメータ λ をガンマ分布に従う確率変数とみなし, それを周辺化 (marginalization) することで導出できる. ガンマ分布の形状母数を α, 尺度母数を $1/\beta$ として, Lomax 分布の確率密度関数 $f_T(t)$ は次式より得られる.

$$
\begin{aligned}
f_T(t) &= \int_0^\infty \lambda \exp(-\lambda t) \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \lambda^{\alpha-1} \exp(-\beta\lambda) d\lambda, && (1)\\
&= \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+t)^{\alpha+1}} \cdot \int_0^\infty \frac{(\beta+t)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \lambda^\alpha \exp(-(\beta+t)\lambda) d\lambda, && (2)\\
&= \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+t)^{\alpha+1}}. && (3)
\end{aligned}
$$

また, 生存関数 $P(T > t)$ は次式で与えられる.

$$
P(T > t) = \left(\frac{\beta}{\beta+t}\right)^\alpha. \tag{4}
$$

上記の生存関数より, 次式が得られる.

$$
P(T > t+s | T > s) = \left(\frac{\beta+s}{\beta+t+s}\right)^\alpha. \tag{5}
$$

これは, 時刻 s が増大すればするほど, 変数 s に依存した条件付き生存確率が単調増加することを意味し, Lomax の主張を合理的に表現できる分布となっている. 指数分布に従う確率変数 Z では, $P(Z > t+s | Z > s) = P(Z > t)$ となり, s に依存しない無記憶性 (memoryless) が成立している. Lomax 分布も $\alpha/\beta = \lambda_0$ を保ったまま, $\alpha \to \infty, \beta \to \infty$ とすることで, $(\beta/(\beta+t))^\alpha \to \exp(-\lambda_0 t)$ と近似できて, 極限分布は無記憶性を持つと言える. また, 分布が heavy-tailed (裾が重い) であることの定義の一つ [2] は, 任意の $\theta > 0$ について, $\mathrm{E}[\exp(\theta T)] \to \infty$ となり, モーメント母関数 (MGF) が定義できないことである. Lomax 分布はそれに該当する.

2　スケール不変性について

スケール不変性 (scale invariance) とは, 任意の $a > 0, t > 0$ について次式が成立することである.

$$
P(T > at) = C(a) \cdot P(T > t). \tag{6}
$$

上式より, 任意の $a > 0, t > 0$ について, 次式を満たす関数 $f(t)$ は, スケール不変性を持つ.

$$f(at) = C(a) \cdot f(t). \tag{7}$$

$t = 1$ を代入して, $C(a) = f(a)/f(1) \equiv g(a)$ と定義すれば, 7 式は次のように表わせる.

$$g(at) = g(a) \cdot g(t). \tag{8}$$

これは, 乗法型のコーシー関数方程式 (multiplicative Cauchy functional equation) と呼ばれる. また, $e^x = t$, $e^y = a$, $h(x) = \log(g(e^x))$ として, 8 式は次式で書き換えられる.

$$h(x + y) = h(x) + h(y). \tag{9}$$

これは, 加法型のコーシー関数方程式 (additive Cauchy functional equation) であり, その解は $h(x) = kx$ に限られる. つまり, $g(t) = e^{h(x)} = e^{kx} = e^{k\log(t)} = t^k$ であり, べき乗関数 (power function) となる. 従って, $P(T > t) = f(t) = f(1)g(t) = f(1)t^k$ である.

4 式を振り返ると, 十分に大きな t について, Lomax 分布はべき乗関数と見做せる. 即ち, 漸近的にスケール不変性を満たすと考えることができる.

参考文献

[1] K. S. Lomax, "Business failures: Another example of the analysis of failure data," Journal of the American Statistical Association, vol. 49, no. 268, pp. 847–852, Dec. 1954.

[2] S. Foss, D. Korshunov, S. Zachary, An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions, Springer Science & Business Media, 21 May 2013.

付録 A　特になし