負の二項分布のモーメント母関数と加法性

Hirotsugu Seike

2026 年 1 月 4 日

1　導入

互いに独立に負の二項分布に従う $X \sim \mathrm{NB}(r_1, p)$, $Y \sim \mathrm{NB}(r_2, p)$ が与えられたとき, $X + Y \sim \mathrm{NB}(r_2, p)$ となる．この性質を, 負の二項分布の加法性 (additivity) と呼ぶ．このことを, モーメント母関数の形から確認する.

2　負の二項分布のモーメント母関数の導出

負の二項分布のモーメント母関数は次式で与えられる.

$$\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \tag{1}$$

$$= p^r \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r-1} \left\{e^t(1-p)\right\}^k. \tag{2}$$

ここで, テイラー展開を適応した $(1-x)^{-r}$ の形を考える (ただし, $|x| < 1$ である) と, 次式が得られる (ただし, $|e^t(1-p)| < 1$ に注意する).

$$\mathbb{E}\left[e^{tX}\right] = p^r(1 - \left\{e^t(1-p)\right\})^{-r}, \tag{3}$$

$$= \left(\frac{p}{1 - \{e^t(1-p)\}}\right)^r. \tag{4}$$

3　加法性の確認

上節より, $Z = X + Y$ とすると次式が得られる.

$$\mathbb{E}\left[e^{tZ}\right] = \mathbb{E}\left[e^{t(X+Y)}\right] = \mathbb{E}\left[e^{tX}\right] \cdot \mathbb{E}\left[e^{tY}\right], \tag{5}$$

$$= \left(\frac{p}{1 - \{e^t(1-p)\}}\right)^{r_1} \cdot \left(\frac{p}{1 - \{e^t(1-p)\}}\right)^{r_2}, \tag{6}$$

$$= \left(\frac{p}{1 - \{e^t(1-p)\}}\right)^{r_1 + r_2}. \tag{7}$$

これは $\mathrm{NB}(r_1 + r_2, p)$ のモーメント母関数に他ならないので, $Z \sim \mathrm{NB}(r_1 + r_2, p)$ となる.

参考文献

付録 A　特になし