コクランの定理 (Cochran's theorem)

清家大嗣

2023 年 5 月 8 日

1　コクランの定理の証明

適当なランク r_1, r_2 の 2 つの実対称行列 B_1, B_2 を選択することで, 自由度 n のカイ二乗分布に従う確率変数 X を, 自由度 r_1, r_2 に従う互いに独立なカイ二乗分布 X_1, X_2 に分解することができる ($n = r_1 + r_2$). 確率変数 X が自由度 n のカイ二乗分布に従うことを $X \sim \chi^2(n)$ とすれば, このことは次のコクランの定理として理解される.

Th. 1. 各成分が互いに独立に標準正規分布に従うベクトル $\boldsymbol{x}$ について, 次式が成立すると仮定する *(I は単位行列であり, B_1, B_2 はランクが r_1, r_2 の実対称行列 ($n = r_1 + r_2$)).*

$$\boldsymbol{x}^T I \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T B_1 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T B_2 \boldsymbol{x}. \tag{1}$$

ここで, $\boldsymbol{x}^T I \boldsymbol{x} \sim \chi^2(n)$, $\boldsymbol{x}^T B_1 \boldsymbol{x} \sim \chi^2(r_1)$, $\boldsymbol{x}^T B_2 \boldsymbol{x} \sim \chi^2(r_2)$ となり, $\boldsymbol{x}^T B_1 \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}^T B_2 \boldsymbol{x}$ は互いに独立な確率変数となる. また, r_1, r_2 は各々, 行列 B_1, B_2 の階数 (ランク) と一致する.

Proof. I は単位行列であるため, B_1, B_2 は実対称行列である. 従って, 固有値分解より, 適当な直交行列 D_1, 及び対角行列 Λ_1 を用いて, $D_1 \Lambda_1 D_1^T = B_1$ となる. 同様にして, $D_2 \Lambda_2 D_2^T = B_2$ となる. ここで, 任意の行列 A, B について成立するランクの性質 ($\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(A)$) を利用し, $\mathrm{rank}(\Lambda_1) = \mathrm{rank}(B_1) = r_1$ となることに注意する (このことは, 以下 2 式から分かる).

$$\mathrm{rank}(\Lambda_1) = \mathrm{rank}(D_1^T B_1 D_1) \leq \mathrm{rank}(B_1) = r_1. \tag{2}$$

$$\mathrm{rank}(\Lambda_1) \geq \mathrm{rank}(D_1 \Lambda_1 D_1^T) = \mathrm{rank}(B_1) = r_1. \tag{3}$$

同様にして, $\mathrm{rank}(\Lambda_1) = r_2$ である. 二次形式である (1) 式の行列部分に, 左から D_1^T, 右から D_1 をかけて, 整理すると (4) 式が得られる ($D_1^T D_1 = I$, $\Lambda_1 = D_1^T B_1 D_1$ を利用).

$$\boldsymbol{x}^T (I - \Lambda_1) \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T D_1^T B_2 D_1 \boldsymbol{x}. \tag{4}$$

$I - \Lambda_1$ と $D_1^T B_2 D_1$ は行列のランクは等しくなる. また, 直交行列 D_1^T, D_1 は, 当然正則行列でもあるため, $I - \Lambda_1$ のランクは, B_2 と等しくなる (正則行列をかけた行列のランクは変化しない). 以上より, ランク $r_1 = n - r_2$ の対角行列 Λ_1 の非ゼロの固有値は 1 にならなければならない. 同様にして, ランク r_2 の対角行列 Λ_2 の非ゼロ固有値は 1 となる.

上記を考慮した上で, $B_1 = D_1 \Lambda_1 D_1^T$ を (1) 式に代入して, 整理する ($D_1 D_1^T = I$ を利用).

$$\boldsymbol{x}^T B_2 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T D_1 (I - \Lambda_1) D_1^T \boldsymbol{x}. \tag{5}$$

また, (1) 式右辺第一項に着目すると,

$$\boldsymbol{x}^T B_1 \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T D_1 \Lambda_1 D_1^T \boldsymbol{x}. \tag{6}$$

となる．正規乱数ベクトル $\boldsymbol{x}$ に, 直交行列をかけたベクトルも同様に正規乱数ベクトルとなることから, $D_1^T \boldsymbol{x}$ も各成分が互いに独立に標準正規分布に従う (証明は付録 A を参照). 従って, Λ_1 がランク (自由度) r_1 の非ゼロの固有値が 1 であること, $I - \Lambda_1$ の形より, $\boldsymbol{x}^T B_1 \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^T B_2 \boldsymbol{x}$ が互いに独立にカイ二乗分布に従うこととなる.

□

参考文献

A　補足

各成分が互いに独立に標準正規分布に従う確率変数ベクトル (正規乱数ベクトル) $\boldsymbol{x}$ を直交行列 A により変換した $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ が従う分布について考える．最初に, $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^T A^T A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}$ であることに注意する．このことを用いて, 標準正規分布の密度関数, 及びヤコビアンを用いた確率変数の変換について考えると, ベクトルの各成分 $x_1, x_2, ..., x_n$, $y_1, y_2, ..., y_n$ について,

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\}^n \cdot e^{-x_1^2/2} \cdot e^{-x_2^2/2} \cdot \cdots \cdot e^{-x_n^2/2} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\}^n \cdot e^{-y_1^2/2} \cdot e^{-y_2^2/2} \cdots e^{-y_n^2/2} \cdot \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \tag{7}$$

A は直交行列であり, $|\frac{\partial y}{\partial x}| = |A| = 1$ となるので, (7) 式は $\boldsymbol{y}$ が各成分が互いに独立に標準正規分布に従うと言っていることに他ならない．つまり, 正規乱数ベクトルの直交変換も正規乱数ベクトルとなる.