感染症モデル (Epidemic model) について

清家大嗣

平成 32 年 4 月 7 日

1　流行を決定論的に記述する SIR モデルについて

感染症の感染人口を記述するモデルに SIR モデル [1] が存在する. S は感染候補者 (Susceptible), I は感染者 (Infected), R は感染から回復した免疫保持者 (Recovered) を表す. SIR モデルでは, 感染候補者が感染することで感染者となり, 感染者が治癒することで免疫保持者となる. このことから, 登場するプレイヤーの時刻 t における人口を S(t), I(t), R(t) と定義すると次式が成立することになる[1].

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\alpha S(t)I(t) \tag{1}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \tag{2}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \beta I(t) \tag{3}$$

(1) 式は, 時間当たりの感染人口の増分は感染人口と感染候補人口に比例することから妥当といえる. (2) 式は, 時間当たりの免疫保持者の増分は感染人口に比例することから理解される. 本稿では, 2020 年 4 月現在, なお終息に至っていないコロナウィルスと同様なケースについて考えて, 免疫保持者を除いた SI モデルについて考えたい. $R(t) = 0$ となるため, SI モデルは次の上微分方程式で記述される.

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\alpha S(t)I(t) \tag{4}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \alpha S(t)I(t) \tag{5}$$

死亡者も感染者に含まれるとすれば任意の時刻において $N = S(t) + I(t)$ となる (N は定数). この上微分方程式を解くと $I(t)$ の解析解が得られる.

$$I(t) = \frac{NN_0}{N_0 + (N - N_0) \cdot e^{-N\alpha t}} \tag{6}$$

N_0 は時刻 0 における感染者数である. 試しに $t = 0$ と $t = \infty$ を代入すれば N_0 と N が得られる. しかし, 我々が最も関心がある対象は感染人口がどのように増加する挙動である. (6) 式を微分することでその傾向について理解することを目的とする. 分かりやすさのため, 次式のように $I(t)$ を置く.

$$I(t) = \frac{N}{1 + (N - N_0)/N_0 \cdot e^{-N\alpha t}} \equiv N \cdot \frac{1}{1 + C \cdot e^{-N\alpha t}} \equiv NI^*(t) \tag{7}$$

つまり, $dI^*(t)/dt$ がどのように時間変化するかが分かれば感染症の流行について理解の一助となる.

---

[1] この際, 各人口を連続値として取り扱っている. この仮定は人口が十分に大きければ妥当と思われる. 例えば, 全人口 $N = S(t) + I(t) + R(t)$ で各人口の値を割ることで, N が十分に大きければ $S(t)/N, I(t)/N, R(t)/N$ の人口一人当たりの変化量を十分に小さくできるからである.

$$\frac{dI^*(t)}{dt} = \frac{C \cdot N\alpha \cdot e^{-N\alpha t}}{(1 + C \cdot e^{-N\alpha t})^2} \tag{8}$$

$$= \frac{1}{2 + C^{-1} \cdot e^{N\alpha t} + C \cdot e^{-N\alpha t}} \tag{9}$$

この式は次の 2 点から理解できる．時間 t が大きくなるにつれて $C \cdot e^{-N\alpha t}$ は指数関数的に小さくなる．正数 A に関する関数 $f(A) = A + 1/A$ が最小となるのは $A = 1/A$ の時である[2]．従って, 時間 t が小さいときは $C \cdot e^{-N\alpha t}$ が (9) 式の分母の支配項となり, 逆は $C^{-1} \cdot e^{N\alpha t}$ が支配項となる．これから, 感染者数の増加数が釣鐘型の分布を取ることが理解される.

参考文献

[1] W. O. Kermack and A. G. McKendrick (1927).“A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics”. Proc. Roy. Soc. of London. Series A 115 (772): 700-721.

[2] このことは相加相乗平均から分かる