マルコフ限界 (Markov Bound) とチェルノフ限界 (Chernoff Bound) Part. 2

清家大嗣

2021 年 6 月 7 日

1　チェルノフ限界 (Markov bound) について (続 1)

その 1 において導出したチェルノフの不等式に対して, 正の確率変数 X_k の和を取った確率変数 $X = X_k$ を適応させる. この場合, 次のふと式が成立する.

$$\Pr(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{E}[e^{tX}]}{e^{ta}} = e^{-ta} \cdot \mathrm{E}[\prod_k e^{tX_k}] = e^{-ta} \cdot \prod_k \mathrm{E}[e^{tX_k}] \tag{1}$$

3 番目の式と 4 番目の式が等号で結ばれるのは, 各確率変数 X_k が互いに独立であることを仮定している為である. 同様にして, 次の不等式も得ることができる.

$$\Pr(X \leq a) \leq e^{ta} \cdot \prod_k \mathrm{E}[e^{-tX_k}] \tag{2}$$

2　チェルノフ限界 (Chernoff bound) について (続 2)

チェルノフ限界の具体的な応用先として, X_k が 0 か 1 のどちらかの値を取る確率変数である場合を考える (前節同様に, $X = \sum_k X_k$ とする). 1 となる確率を p_k, 0 となる確率を $1 - p_k$ とする. つまり, $\mathrm{E}[X_k] = p_k$ である. また, $\mathrm{E}[e^{tX_k}] = 1 + p_k(e^t - 1)$ である. 前節の不等式にこれらを代入することで, 下の不等式が成立する.

$$\begin{aligned}\Pr(X \geq a) &\leq e^{-ta} \cdot \prod_k \mathrm{E}[e^{tX_k}] = e^{-ta} \cdot \prod_k (1 + p_k(e^t - 1)) \\ &\leq e^{-ta} \cdot e^{\sum_k p_k(e^t-1)} = e^{\mathrm{E}[X](e^t-1)-ta}\end{aligned} \tag{3}$$

2 段目の 1 番目の式と 2 番目の式の間の不等号は, $1 + x \leq e^x (x \geq 0)$ を利用した. この理由は, 積よりも和の方が取り扱いやすいからである. この不等式の最右辺の式を最小にするような正数 t は, $f(t) = \mathrm{E}[X](e^t - 1) - ta$ を最小にするような t である. $f(t)$ が凹関数であることを考慮して, $f'(t) = 0$ となるような t を (3) の不等式に代入する ($t = \log(a/\mathrm{E}[X])$). そうすうと, (3) 式は次のように書き換えることができる.

$$\Pr(X \geq a) \leq e^{a - \mathrm{E}[X] a \log(a/\mathrm{E}[X])} \tag{4}$$

ここに, $a = (1 + \delta)\mathrm{E}[X] (\delta > 0)$ を代入すると更に次のように書くことができる.

$$\Pr(X \geq (1 + \delta)\mathrm{E}[X]) \leq \left(\frac{e^\delta}{(1 + \delta)^{1+\delta}}\right)^{\mathrm{E}[X]} \tag{5}$$

これは, 期待値からのずれが $\mathrm{E}[X]$ が大きくなればなるほど確率的に小さくなることを意味する. 同様にして, 次の不等式も導出できる (a が正数である条件から $0 \leq \delta < 1$ に注意する).

$$\Pr(X \geq (1-\delta)\mathrm{E}[X]) \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mathrm{E}[X]} \tag{6}$$

参考文献

[1] Chernoff の不等式 (Chernoff 限界) の導出, `https://whyitsso.net/math/statistics/Chernoff_bound.html`

[2] 鈴木涼一監修, ブロックチェーン 3.0 - 国内外特許からユースケースまで NTS