変分法 (Variational Calculus (or Calculus of Variations))

清家大嗣

平成 31 年 10 月 16 日

1 変分法 [1]

変分法 (Calculus of Variations) では, 関数の集合から実数への写像を行う汎関数 (functional) を最大・最小にするような関数 y を求める問題を取り扱う。例えば、変分法を用いると空間内の 2 点を結ぶ最短距離の曲線 (これを関数 y により表現) は直線となることが示される (2 次元ならば 2 点を通る直線 $y = ax + b$ などが求まる)。汎関数を $F[y]$ と定義し, y は実数 x を入力とする通常の関数とする。関数 $y(x)$ の x における微小変位を $\epsilon\eta(x)$ (摂動と呼んだりもする) と置くと, 汎関数の値の微小変化は次式で表現される。

$$F[y(x) + \epsilon\eta(x)] = F[y(x)] + \epsilon \int \frac{\partial F}{\partial y(x)} \eta(x) dx + O(\epsilon^2) \tag{1}$$

この式は, 関数 y への入力 x を無限次元変数として取り扱えば, 次式のような多変数関数の偏微分の自然な拡張となっていることが理解される。

$$F[x_1 + \epsilon, x_2 + \epsilon, ..., x_n + \epsilon)] = F[y] + \epsilon \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_i} + O(\epsilon^2) \tag{2}$$

ここで、(1) 式の汎関数 F が関数 y に対して, 最大・最小値を取る場合、汎関数 F は関数 y の任意の微小変化に対して変化しない (停留)。従って、ϵ が十分に小さい場合次式が成立する。

$$\int \frac{\partial F}{\partial y(x)} \eta(x) dx = 0 \tag{3}$$

上式は, 任意の関数 $\eta(x)$ に対して成立するので $\partial F/\partial y(x) = 0$ であることが必要である (例えば, ある 1 点 $\hat{x}$ の近傍以外において $\eta(x) = 0$ となるケースを考えると, $\partial F/\partial y(\hat{x}) = 0$ である必要があり、$\hat{x}$ は x の定義域内全てにおいて定義可能であるため)。

より具体的な汎関数 F を考える。例えば, $y(x)$ と $y'(x)$, および x に依存する関数 G を x の定義域 $[x_1, x_2]$ において積分した実数値を持つ汎関数 F について考える。汎関数 F は次式で定義される。

$$F[y] = \int_{x_1}^{x_2} G(y, y', x) dx \tag{4}$$

この y に微小な変動 $\epsilon\eta(x)$ を加えると次式のように汎関数 F は変化する。

$$F[y(x) + \epsilon\eta(x)] = F(y) + \epsilon \int_{x_1}^{x_2} \{ \frac{\partial G}{\partial y(x)} \eta(x) + \frac{\partial G}{\partial y'(x)} \eta'(x) \} dx + O(\epsilon^2) \tag{5}$$

第二項の部分積分は次式で表現され,

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial G}{\partial y'(x)} \eta'(x) dx = \left[\frac{\partial G}{\partial y'(x)} \eta(x) \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\partial G}{\partial y'(x)} \right\} \eta(x) dx \tag{6}$$

ここで、摂動 $\eta(x)$ が積分区間の両端では 0 ($y(x)$ の値が固定されているため) となると考えれば,

(5, 6) 式より (7) 式が得られる。

$$F[y(x)+\epsilon\eta(x)] = F(y) + \epsilon\int_{x_1}^{x_2}\left\{\frac{\partial G}{\partial y(x)} - \frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial G}{\partial y'(x)}\right\}\right\}\eta(x)dx + O(\epsilon^2) \tag{7}$$

(3) 式の場合と同様に考えることで次式が得られる。この式は、オイラーラグランジュの方程式 (Euler-Lagrange equation) と呼ばれる。

$$\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial G}{\partial y'}\right\} = 0 \tag{8}$$

例えば, $G = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1+y'^2}$ とした場合、汎関数 F は曲線 $y(x)$ により定められる 2 点間の距離を表すことになる。この場合、(8) 式は次式のようになる。

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C(\text{定数}) \tag{9}$$

従って、y' に関する 2 次方程式が得られ、因数分解により y' が求まる。その後 2 個の線形微分方程式について解けば $y = C_1x + C_2$ が得られる。

参考文献

[1] C.M. Bishop. 元田浩, 栗田多喜夫他訳, 吉識知明訳. 2006. 『パターン認識と機械学習』 発行: 丸善出版株式会社, 編集: 主プリンガー・ジャパン株式会社.