

ビタビ復号, 理論上界導出他

@Seike_Lab

Status Report Covers Period: From 28th Feb. 2016 to 6th Mar. 2016

1 理論上界の導出

誤り訂正符号を用いる場合, その符号が保障する最低限度の性能 (Performance) を知ることが重要である. 理論上界は, その 1 指標となる. ビタビ復号は, シフトレジスタが取り得る状態の制約により, 誤り訂正を行う. またその際, メトリックを用いて, 最も発生する確率が高いと予想されるパスを選択する. メトリックは, 硬判定においてはハミング距離を用いて, 軟判定においてはユークリッド距離を用いる [補足 A]. また, 以下ビタビ復号の理論上界を求める際の実例として, 符号器のシフトレジスタ数を 2 とし, 8 進数の生成多項式は $G = (5, 7)$ で符号化率は $1/2$, シフトレジスタから確定される状態は S_{ij} (例えば, S_{00}, S_{10} など) と表現する (図 1).

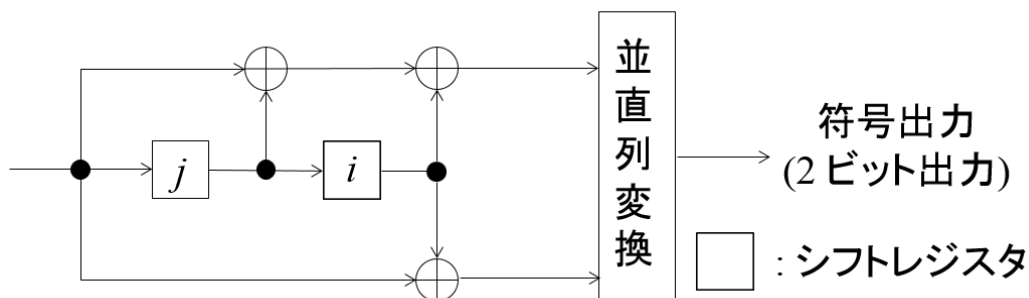


図 1: 拘束長 $K = 3$, 符号化率 $R = 1/2$, 生成多項式 $G = (5, 7)$ の符号器

1.1 パス誤り率 P_e の理論上界導出

最初に, 正しいパスが全 0 パスであると仮定する (このようにしても一般性は当然失われない). 全 0 のパスがメトリック計算において選択されず誤るのは, 図 2 のように, 合流する地点のどこかで 1 の入力があったと仮定したパスが合流してくる場合である. さらに, ある特定の地点での誤りパスの合流の仕方について考える. 図 3 にその様子を示す. 図 3 では, ある特定の地点で合流する誤りパスが 3 つ (後の状態遷移図から分かるが, 無限に長い入力に対して, 誤りパスは無限通り考えられる) 示されている.

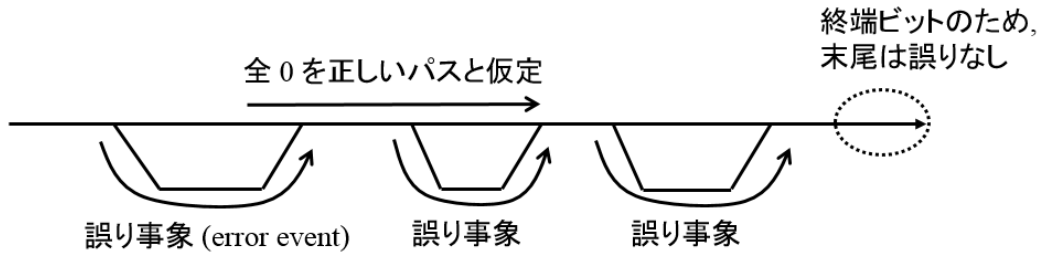


図 2: 全 0 を正しいパスと仮定した際のパスの誤り事象

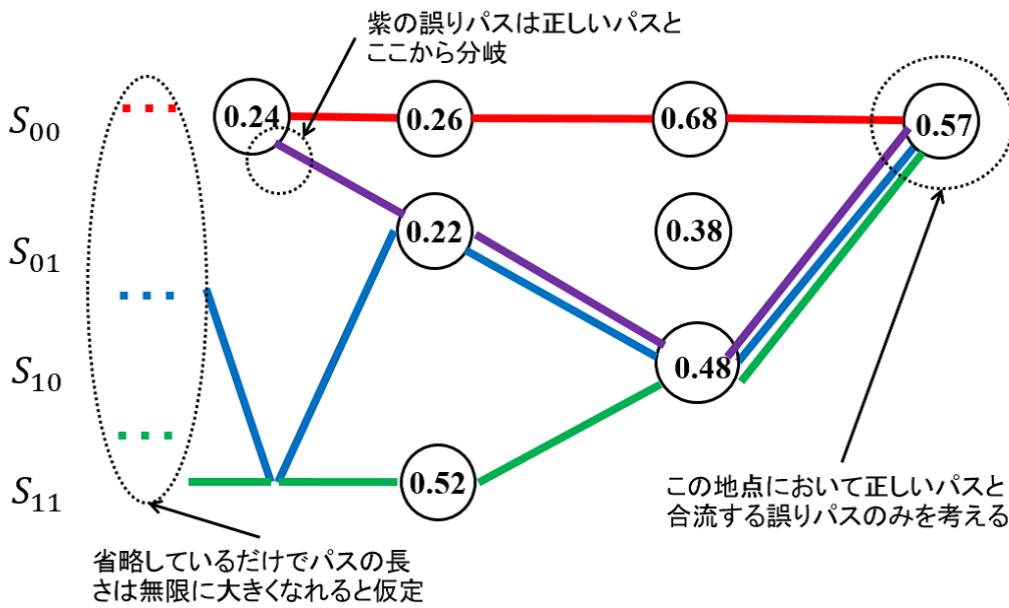
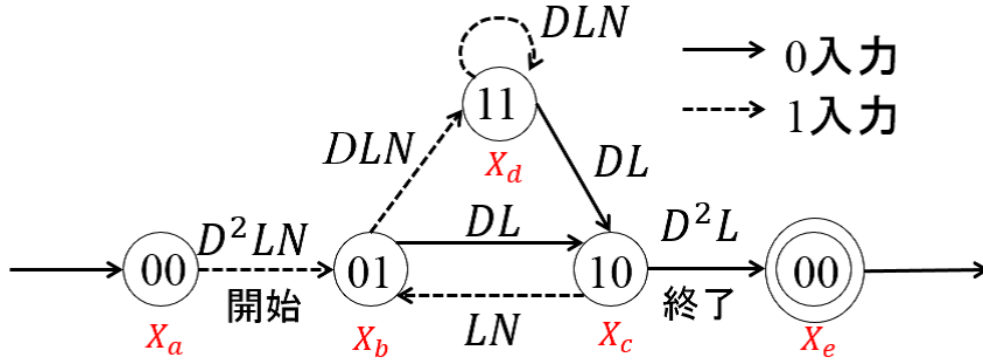


図 3: ある地点 (状態) における正しいパスへの誤りパスの合流

図 3 において、考えられる全ての誤りパス (無限個存在する, 図では, 紫青緑の 3 種類を表示) に対して, その各誤りパスが発生する確率を合計すれば, パスが合流する際にパス誤りが発生する確率の上界が計算できる. 各誤りパスの誤り率は, そのパスと正しいパスとのハミング距離が分かれば, 計算できる (硬判定, 軟判定それぞれの場合について, [補足 B] に載せた). どのような誤りパスが存在しているかは, 図 4 にある状態遷移図を用いて調べる.



D の指数部 : 正しいパスと誤りパスとのハミング距離
L の指数部 : パスの数, N の指数部 : 1 の入力数

図 4: 誤りパスが正しいパスに合流するまでの状態遷移図

[1] の P. 410~413 において, 図 4 の説明がある. また, 式 1 に状態方程式が提示されている. この状態方程式を解くことで, 各誤りパスの正しいパスとのハミング距離が計算できる. 状態方程式の解は状態遷移図にループが存在するため, 多項式の指数が無限に大きくなること (これが, 無限に誤りパスが存在する理由) に, 注意する.

$$\begin{cases} X_b = X_a \cdot D^2LN + X_c \cdot LN \\ X_c = X_b \cdot DL + X_d \cdot DL \\ X_d = X_b \cdot DLN + X_d \cdot DLN \\ X_e = X_c \cdot D^2L \end{cases} \quad (1)$$

また, 開始状態 X_a から終了状態 X_e までの遷移多項式を $T(D, L, N)$ とすれば, $X_e = X_a \cdot T(D, L, N)$ と表せる. 従って, 式 1 と合わせて, 遷移多項式は次式で表される.

$$\begin{aligned} T(D, L, N) &= \frac{X_e}{X_a} \\ &= \frac{D^5L^3N}{1 - DL(1+L)N} \\ &= D^5L^3N + D^6L^4(1+L)N^2 + D^7L^5(1+L)^2N^3 \\ &\quad + \dots + D^{l+5}L^{l+3}(1+L)^lN^{l+1} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

式 2 の変形途中で, 下式を用いた (単純な式変形なので, [1] 内では省略).

$$\begin{aligned} D^5L^3N &= D^5L^3N \cdot (1 - DL(1+L)N) + D^5L^3N \cdot DL(1+L)N \\ &= D^5L^3N \cdot (1 - DL(1+L)N) + (D^5L^3N \cdot DL(1+L)N) \cdot (1 - DL(1+L)N) \\ &\quad + (D^5L^3N \cdot DL(1+L)N) \cdot DL(1+L)N \\ &= D^5L^3N \cdot (1 - DL(1+L)N) + (D^6L^4N^2 \cdot (1+L)) \cdot (1 - DL(1+L)N) \\ &\quad + D^7L^5N^3(1+L)^2 \cdot (1 - DL(1+L)N) + \dots \end{aligned}$$

ここで、式 2 の各項が、各誤りパスによる遷移の種類と 1 対 1 に対応していることに注意する。そして、各項の係数が 2 以上の場合は、その状態の遷移多項式に対応した誤りパスはその数に対応した数だけ存在する。例えば、式 2 の第 3 項目の $(1+L)^2$ を展開した際に現れる $2L \cdot D^7 L^5 N^3$ に対応する誤りパスは、2 つ存在し、正しいパスとのハミング距離は 7、パスのブランチの長さは 6、1 の入力回数は 3 回、といったように考えられる。同様に、第 1 項目の $D^5 L^3 N$ は、1 つしかその種類の誤りパスは存在せず、正しいパスとのハミング距離は 5、パスのブランチの長さは 3、1 の入力回数は 1 回と考えられる。

式 2 を用いて、ようやくパス誤り率の理論上界を計算できる。ハミング距離が k の誤りパスの誤り率は、 P_k と計算できる ([補足 B])。この際、パスの誤り率 P_k は、硬判定、軟判定ともにハミング距離のみに依存する ([補足 B]) ことに注意する。式 2 より、ハミング距離が k (D の指数が k) の誤りパスの合計数 a_k を求めることができる。従って、誤りパスのハミング距離の最小値 (D の指数の最小値) を d_{free} とすれば、ある地点で誤りパスが合流する際のパス誤り率 P_e (ある地点) の理論上界は次式で表される。

$$P_e(\text{ある地点}) < \sum_{k=d_{\text{free}}}^{\infty} a_k \cdot P_k \quad (3)$$

図 3 を見れば分かるが、実際は全誤りパスを合計する必要はない。なぜなら、ビタビ復号を行って行くうちに、他の誤りパスよりメトリックの値が小さく、採択されない誤りパスが出現するからである。しかし、あくまで計算するのは、その復号法の誤り率を保障する理論上界であるため、式 3 で十分である。参考として、この考え方は、ユニオンバウンドという考え方で提示されている。

最後に、式 3 をある地点だけでなく、全地点で考える。無限に長いパスを考えれば、全ての合流地点で式 3 が成立する。従って、パス誤り率は全地点を考慮した場合においても式 3 の右辺を上界の値として押さえ込める。この際、図 5 にある交差する誤りパス (青と赤の誤りパス) は、どちらか片方しか最終的に選択されない。従って、この非常にレアなケースも考慮すると誤り確率の理論上界は、もう少し小さく提示することができるかもしれない。しかし、式 3 の右辺は、余分なケースを数えてしまっているだけで、上界として問題なく働く。この部分もユニオンバウンドの考え方に含まれている。

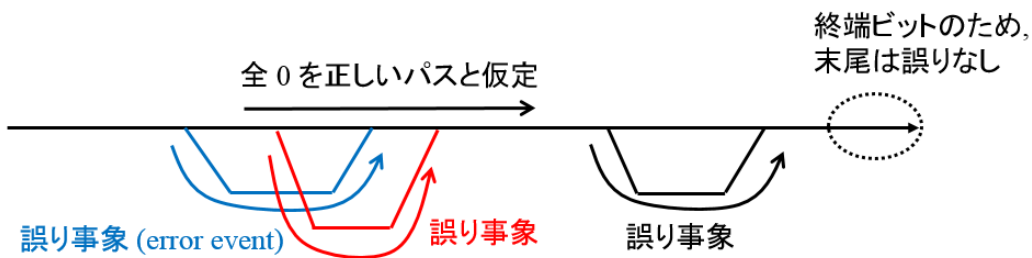


図 5: 全 0 を正しいパスと仮定した際のパスの誤り事象 (交差する誤りパスが存在する場合)

従って、最終的なパス誤り率の理論上界 P_e は式 4 で計算される。

$$P_e < \sum_{k=d_{\text{free}}}^{\infty} a_k \cdot P_k \quad (4)$$

1.2 ビット誤り率 P_b の理論上界導出

ビット誤り率の理論上界は、パス誤り率の仕組みが分かれば、式 2 を用いて比較的簡単に計算できる。各パスが合流する瞬間、どの地点においても 1 ビット復号が行われていることに注意する。つまり、ある地点で 1 ビットの復号がされる瞬間、その時のビット誤り率を P_b (ある地点) とし、ハミング距離が k の誤りパスの総数を a_k 、そのハミング距離が k の各誤りパスのインデックスを i とし、各誤りパスの 1 の入力回数を b_i とする。そうすれば、次式が成立する。

$$P_b(\text{ある地点}) < \sum_{k=d_{\text{free}}}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{a_k} b_i \right) \cdot P_k \quad (5)$$

ここで、 $\sum_{i=1}^{a_k} b_i$ は、式 2 を N で変微分した式の D の指数が k (ハミング距離が k) の項の係数の総和と等しくなる。これは、手で計算して確認すればすぐ分かることなので実際に計算すると良いと思われる。よって、形式的には式 2 を N で微分した多項式 $\frac{\partial T(D; L, N)}{\partial N}$ に対して、パス誤り率の計算と同様な処理を繰り返せばビット誤り率の理論上界を計算できる。ここで、 $c_k = \sum_{i=1}^{a_k} b_i$ とした。

$$P_b < \sum_{k=d_{\text{free}}}^{\infty} c_k \cdot P_k \quad (6)$$

2 発生させる AWGN の分散 σ^2 の計算方法

非常に勘違いが多い部分なので解説する。初めに、 $E_b/N_0 = x$ [dB] の場合、下式が成立する。

$$x = 10 \cdot \log_{10}(E_b/N_0) \quad (7)$$

ここで、 E_b は 1 ビット当たりのエネルギー、 N_0 は雑音信号電力である。確率変数の平均値が 0 の場合、分散は自乗平均と等しくなるため、信号電力と等しい値をとる。AWGN もその例の一つである。従って、 $\sigma^2 = N_0$ とやってしまいたくなる。しかし、これは間違いである。間違いとはっきり認識するため、BPSK 信号がどういうものかということを再確認する。図 6 に MPSK 信号の例である BPSK, QPSK 信号の例を示す。MPSK 信号は、通常複素平面状で表現される。そして、雑音は実部・虚部それぞれにおいて分散 σ^2 、平均 0 の正規分布に従う確率変数で表現される。従って、雑音信号電力は、実部・虚部の信号電力を合わせた $N_0 = 2 \cdot \sigma^2$ になる。

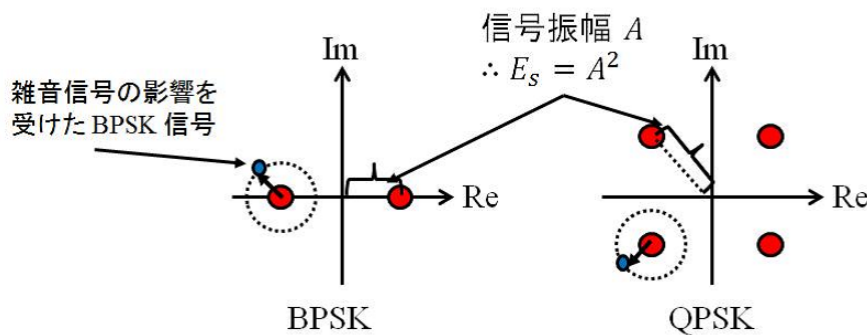


図 6: BPSK, QPSK 信号の複素平面上の表現

つまり符号化率を R とすれば, BPSK の場合 $E_b = E_s/R$ が成立するので, 式 7 を用いて次式が成立する.

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{E_s/R}{2\sigma^2}$$

$$\therefore x = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{E_s/R}{2\sigma^2}\right) \quad (8)$$

例えば, 符号化率 $R = 1/3$, 信号電力 $E_s = 1$ の場合, 式 8 は次式で表される.

$$x = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{3}{2\sigma^2}\right) \therefore \sigma^2 = \frac{3}{2}10^{-\frac{x}{10}}$$

参考文献

- [1] B. Sklar, *Digital Communications: Fundamentals and Applications*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.

A 補足 A: ユークリッド距離を使う理由

軟判定において, ユークリッド距離を用いる妥当性について説明する. 硬判定におけるメトリックとは, なんなのか説明する. 硬判定においては, メトリックとしてハミング距離を採用した. 軟判定では, 確率と等価な値をメトリックとして採用する (図 7).

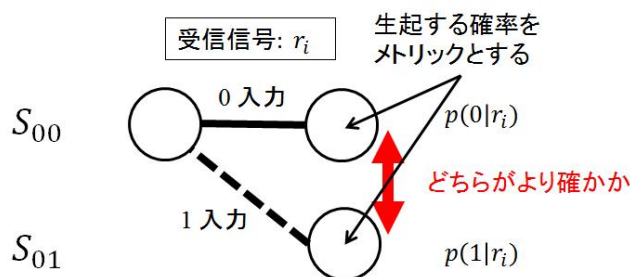


図 7: 1 パスにおける, 確からしいパスの選択の仕方

受信信号が r_i のブランチにおいて, 0 入力となる場合の確率を $p(0|r_i)$, 1 入力となる場合の確率を $p(1|r_i)$ とする (図 7). これら確率はベイズの定理により計算される. 0 が送信機側で入力される事前確率を $p(0)$, 1 が送信機側で入力される事前確率を $p(1)$ とする. そうすると次式が成立する.

$$p(0|r_i) = \frac{p(r_i|0)p(0)}{p(r_i|0)p(0) + p(r_i|1)p(1)}$$

$$= \frac{p(r_i|0)}{p(r_i|0) + p(r_i|1)} \quad (9)$$

2 段目の式変形の過程で $p(0) = p(1) = 0.5$ を利用する. これは受信機側で, 通常事前確率を知ることが不可能なため, 等しい確率になると仮定しているのである. 1 入力の場合も同様にして, 次式が成立する.

$$p(1|r_i) = \frac{p(r_i|1)}{p(r_i|0) + p(r_i|1)} \quad (10)$$

この大小を比較する。大小を比較すれば良いだけなので、分母は無視してよいことが分かる。さらに、受信信号が分散 σ^2 、平均 0 の正規分布に従う雑音の影響を受ける、というモデルが成立すると仮定すれば次式が成立する (確率密度関数は確率でないことに注意する (微小領域 dr_i が掛けられる理由))。

$$\begin{cases} p(r_i|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(r_i-A)^2}{2\sigma^2}\right) dr_i \\ p(r_i|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(r_i+A)^2}{2\sigma^2}\right) dr_i \end{cases} \quad (11)$$

従って、式 9~11 を用いれば、受信信号が r_i で 0 入力されたとした場合のメトリックと 1 入力されたとした場合のメトリックは、それぞれ次のように計算される (dr_i が無視できるのは先程の分母を無視したのと同様な理由)。

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(r_i-A)^2}{2\sigma^2}\right) & (\text{受信信号が } r_i \text{ かつ 0 入力}) \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(r_i+A)^2}{2\sigma^2}\right) & (\text{受信信号が } r_i \text{ かつ 1 入力}) \end{cases} \quad (12)$$

さらに、これを 2 パスの場合に拡張してみよう。図 8 が、その様子を示している。

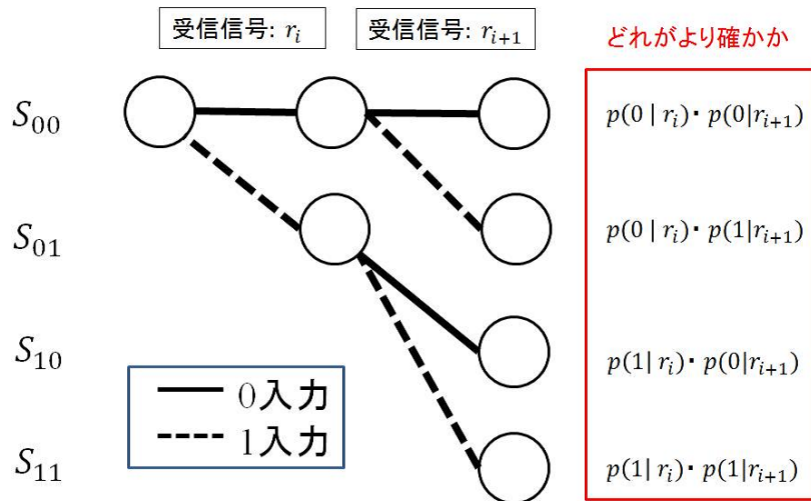


図 8: 1 パスにおける、確からしいパスの選択の仕方

図 8 の 2 パスの場合 (2 パスが理解できれば n パスへの拡張は簡単のため、2 パスの場合についてのみ説明する) では、確率の積によりメトリックが計算される。この場合も各確率の共通部分の係数は無視しても良い (式 9~10 の分母部分など)。しかし、そもそも確率の積は、式 11 を見ても取扱いが困難なことが分かる。そこで対数尤度比 (LLR) を用いる。確率のメトリックは絶対に 0 以上 1 以下の値 (つまりは正の値) をとる。それゆえに、その対数をとった値も大小のみを比較するメトリックの値として適当なのである。図 8 の具体例に値を代入してメトリックを計算してみる。

$$\begin{aligned}
\log(p(0|r_i) \cdot p(0|r_{i+1})) &= \log(p(0|r_i)) + \log(p(0|r_{i+1})) \\
&\sim \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(r_i - A)^2}{2\sigma^2}\right)\right) + \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{(r_{i+1} - A)^2}{2\sigma^2}\right)\right) \\
&= \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) + \left(-\frac{(r_i - A)^2}{2\sigma^2}\right) + \log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) + \left(-\frac{(r_{i+1} - A)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&\sim \left(-\frac{(r_i - A)^2}{2\sigma^2}\right) + \left(-\frac{(r_{i+1} - A)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&\sim -(r_i - A)^2 + -(r_{i+1} - A)^2 \tag{13}
\end{aligned}$$

2 段目の式変形の際、式 12 を用いている。4 段目の式変形では、全てのメトリックの共通項 $\log(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}})$ を削除している。5 段目も、全てのメトリックの分母の共通部分を削除している。つまり、メトリックの値として対数をとれば、式 13 の最終項が最も大きくなるパスを選択すればよい。逆に言うと次式が最も小さくなるパスを選べば良い。

$$(r_i - A)^2 + (r_{i+1} - A)^2 \quad (\text{受信信号が } r_i, r_{i+1} \text{ かつ } 00 \text{ 入力})$$

まとめると、図 8 のメトリックは次のようになる。最も小さいメトリックとなるのがその時点における最も確からしいパスである。

$$\begin{cases} (r_i - A)^2 + (r_{i+1} - A)^2 & (\text{受信信号が } r_i, r_{i+1} \text{ かつ } 00 \text{ 入力}) \\ (r_i - A)^2 + (r_{i+1} + A)^2 & (\text{受信信号が } r_i, r_{i+1} \text{ かつ } 01 \text{ 入力}) \\ (r_i + A)^2 + (r_{i+1} - A)^2 & (\text{受信信号が } r_i, r_{i+1} \text{ かつ } 10 \text{ 入力}) \\ (r_i + A)^2 + (r_{i+1} + A)^2 & (\text{受信信号が } r_i, r_{i+1} \text{ かつ } 11 \text{ 入力}) \end{cases} \tag{14}$$

この値が最終的なメトリックとして選ばれているため、ユークリッド距離が最小になるようなパスを選択するのである。当然、上記のメトリックは全てのパスにおいて計算される訳ではなく、パスが合流する際に、より小さい値を持つメトリックへと更新されていく。このようにして、全ての地点においてメトリックを計算・更新していくのである。

B 補足 B: 硬判定・軟判定のパス誤り率 P_k の計算

ハミング距離が k の誤りパスのパス誤り率 P_k について説明する。

B.1 硬判定

硬判定の場合、各ビットの誤り率を p とすれば、以下のように表せる。

$$\begin{cases} P_k = \sum_{i=(k+1)/2}^k \binom{k}{i} \cdot p^i (1-p)^{k-i} & (k : \text{odd}) \\ P_k = \sum_{i=(k/2)+1}^k \binom{k}{i} \cdot p^i (1-p)^{k-i} \\ \quad + 1/2 \binom{k}{k/2} p^{k/2} (1-p)^{k/2} & (k : \text{even}) \end{cases} \tag{15}$$

B.2 軟判定

軟判定の場合、正規分布の加法性の知識が必要になる。ハミング距離を k とする部分の各受信信号 r_j のインデックスを j とする。正しいパスを全 0 のパスとすれば、各受信信号において次式が成立する。

$$r_j = A + n_j$$

ここで、 A は BPSK 信号の信号電圧である。ユークリッド距離をメトリックとして使えと補足 A で確認した。これを用いれば、正しいパスと、正しいパスとのハミング距離が k の誤りパスのメトリックの差を、次式で表せることが分かる。

$$\sum_{j=1}^k ((r_j - A)^2 - (r_j + A)^2) = \sum_{j=1}^k -4r_j A \quad (16)$$

式 16 が、0 より小さければ誤りは発生していない (メトリックが小さいパスが選択されるパスとなるため)。逆に 0 より大きければ誤りが発生する。つまり、 $A > 0$ であることに注意すれば、次式が成立する場合に誤りが発生すると分かる。

$$\sum_{j=1}^k r_j < 0$$

送信機が送信している信号はすべて 0 なので、 $r_j = A + n_j$ となる。つまり、次式がパスが誤るのに必要な条件である。

$$\sum_{j=1}^k (n_j) < -kA$$

正規分布の加法性により確率変数 $\sum_{j=1}^k n_j$ は、分散 $k\sigma^2$ 、平均 0 の正規分布に従う [補足 C]。つまり、次式が軟判定の誤り率の計算式である。

$$\begin{aligned} P_k &= \int_{-\infty}^{-kA} \frac{1}{\sqrt{2\pi k\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2k\sigma^2}\right) dx \\ &= \int_{kA}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi k\sigma^2}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2k\sigma^2}\right) dx \\ &= \int_{\sqrt{\frac{kA^2}{\sigma^2}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{kA^2}{\sigma^2}}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

式 17 の 3 段目では、置換積分を用いている (ライブラリ関数によくある Q 関数を用いて計算するため)。節 2 の式 $E_s = A^2$ 、 $E_s = RE_b$ (R : 符号化率)、 $N_0 = 2\sigma^2$ を用いれば、式 17 は次の様に書きかえることもできる。

$$P_k = Q\left(\sqrt{\frac{kA^2}{\sigma^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2kRE_b}{N_0}}\right)$$

C 補足 C: 正規分布の加法性

正規分布の加法性について証明する. そのために, 分散 σ_1^2, σ_2^2 , 平均 μ_1, μ_2 の正規分布に従う 2 つの確率変数の和がどういった分布に従うか, 畳み込み積分を用いて証明する. 前者の 2 つの確率密度関数を $f(x), g(x)$ と置き, 2 つの確率変数の和により得られる確率密度関数を $h(x)$ とする.

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2\sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(t-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-t-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right] dt \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)t^2\right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{x-\mu_2}{\sigma_2^2}\right)t - \left(\frac{\mu_1^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)\right] dt \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\left(t - \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{x-\mu_2}{\sigma_2^2}\right)\right)^2\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{x-\mu_2}{\sigma_2^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right] dt \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(\mu_1^2\sigma_2^4 + (x-\mu_2)^2\sigma_1^4 + 2\mu_1(x-\mu_2)\sigma_1^2\sigma_2^2) - \mu_1^2\sigma_2^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - (x-\mu_2)^2\sigma_1^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\sigma_1^4\sigma_2^4}\right) \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\left(t - \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{x-\mu_2}{\sigma_2^2}\right)\right)^2\right] dt \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{\mu_1^2 + (x-\mu_2)^2 - 2\mu_1(x-\mu_2)}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\left(t - \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{x-\mu_2}{\sigma_2^2}\right)\right)^2\right] dt \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) \\
&\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)\left(t - \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\left(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{x-\mu_2}{\sigma_2^2}\right)\right)^2\right] dt \tag{18}
\end{aligned}$$

ここで, 式 18 に対して下式のガウス積分公式を用いる.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(t-A)^2}{2B^2}\right) dt = \sqrt{2\pi}B$$

その結果, 次式が得られる. これが正規分布の加法性である.

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}\right) \tag{19}$$