スカラー・ベクトル三重積

清家大嗣

平成 31 年 10 月 17 日

1 スカラー・ベクトル三重積について

1.1 スカラー三重積 (Scalar Triple Product) について

スカラー三重積は, 2 つのベクトルの外積 (クロス積) により得られるベクトルともう一つのベクトルとの内積を計算することにより得られる. 例えば, 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ の場合次のように計算される.

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \tag{1}$$

ベクトルとベクトルの内積であるため, 上記計算によってスカラー値が得られることになる. このスカラー値の正負を確認することで, この 3 つのベクトルを基底とした場合の座標系が判定できる. 例えば, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) > 0$ なら右手系であるし, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) < 0$ ならば左手系である ($(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}) = 0$ ならば, $\boldsymbol{a}$ は $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の線形結合で表されることになる).

スカラー三重積は, 次式のように計算順序を置換することもできる. これは, 外積と内積の持つ幾何学的意味から, スカラー三重積が平行六面体の符号付き体積を表し, その符号についてのみ注意すればよいことからも分かる[1].

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} \equiv [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] \tag{2}$$

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}] \tag{3}$$

1.2 ベクトル三重積 (Vector Triple Product) について

ベクトル三重積は, 2 つのベクトルの外積 (クロス積) により得られるベクトルともう一つのベクトルとの外積を計算することで得られる. 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ に関して, ベクトル三重積は次のように計算される.

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \tag{4}$$

上記より得られるベクトルは, 次式のように変形することができ, これはラグランジュの公式とも呼ばれる. このことを証明する.

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \tag{5}$$

証明 1. $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ は, $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ に直交しているため, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \mu_1 \boldsymbol{b} + \mu_2 \boldsymbol{c}$ $(\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R})$ と表現することができる [2]. また, $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{a}$ にも直交しているため, $\mu_1 \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} + \mu_2 \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ となる.

[1] 順序が分からくなった場合, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}x, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{c} = \boldsymbol{e}_z$ など単純な例について考えればよい

[2] $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ により張られる 2 次元平面に直交しているため, その $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ に直交しているベクトルは $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ により張られる平面内に存在することになる. これは, あるベクトルに直交する平面はそれと平行なモノを除けば唯一つに定まることからも理解できる

従って, $\mu_1 = \lambda(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}), \mu_2 = -\lambda(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ と書くことができる. つまり, 最終的にベクトル三重積は次のようにかける.

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \lambda((\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c})\ (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{6}$$

ここで, $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ も $(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}$ も $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 各々に関して線形なので λ は定数となる. 例えば, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} = (1,0,0), \boldsymbol{b} = (0,1,0)$ とすれば $\lambda = 1$ が得られ, 次式が得られる.

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}. \tag{7}$$

1.2.1 スカラー四重積 (Scalar Quadruple product)

スカラー三重積とベクトル三重積の公式を用いると, 次のようにスカラー四重積に関する公式を得ることができる.

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \tag{8}$$

証明 2.

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) &= ((\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b} \\ &= (-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d})\boldsymbol{b} \\ &= (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \end{aligned} \tag{9}$$

一つ目の等式では, スカラー三重積の置換公式を用いて, 二つ目の等式ではベクトル三重積のラグランジュの公式を用いた.

このスカラー値は, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ が張る平行四辺形を, $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$ が張る平行四辺形に射影した場合に得られる符号付き面積と $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$ が張る平行四辺形の面積をかけた値となる. スカラー四重積は, 一般相対性理論においても重要な意味を持つ式の 1 つであるようである [1].

また, 特別な場合として $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{d}$ とした場合, ラグランジュの恒等式が得られる.

$$||\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||^2 = ||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2 - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2. \tag{10}$$

参考文献

[1] 石井俊全. 2017. 『一般相対性理論を一歩一歩数式で理解する』 ベレ出版.